
Sucesiones y límites

Lección 1. Concepto. Progresiones

Contenido de este documento:

Introducción y directrices metodológicas

Objetivos específicos

Conocimientos previos.

Prueba sondeo.

Proceso sucesivo. Definición de sucesión.

Progresiones.

Progresiones aritméticas.

Progresiones geométricas.

Aplicaciones.

Soluciones a los ejercicios planteados en la lección

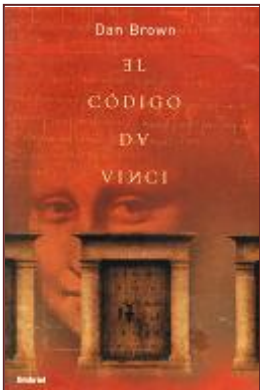
Introducción y directrices metodológicas.

Siempre es deseable hacer una enseñanza lo más significativa posible. Esta unidad lo permite pues la presencia de las sucesiones (y en particular de las progresiones), en nuestro entorno cotidiano es un buen punto de partida para desarrollarla con una metodología adecuada. Por esta razón, la unidad se empieza mostrando algunos ejemplos de procesos que llamaremos *sucesivos* porque todos tienen en común la reiteración de un fenómeno que da lugar a la aparición *sucesiva* de elementos. Son procesos que pueden y deben describirse con lenguaje coloquial que trataremos de utilizar con el fin de crear la teoría matemática que los explique y, en este caso, conducirnos al concepto de sucesión. No debemos rehuir la utilización del lenguaje coloquial para iniciar las explicaciones pues sería poco didáctico iniciarlo con términos más formales desde el punto de vista matemático, como, por ejemplo, decir de entrada que las sucesiones son aplicaciones de subconjuntos finitos de los números naturales $\mathbb{N}$ en elementos de otros conjuntos. El modo de hacerlo, como se verá, permite realizar una introducción *significativa* de un concepto (el de sucesión) que posee un cierto nivel de abstracción. Esto debemos tenerlo en cuenta cuando tratemos de comprobar que el alumnado ha captado las ideas fundamentales.

Curiosidad.

*No cabe duda que, poco a poco, las matemáticas van penetrando en el lenguaje coloquial. Quizá sea debido a que la generalización de la enseñanza está haciendo llegar sus conceptos y procedimientos a la mayor parte de la población. En la edición de 1992 del Diccionario de la Real Academia de la Lengua Española, aparecen ocho acepciones de la palabra **sucesión**. Entre ellas una numérica que dice así: “**Conjunto ordenado de términos que cumplen una ley determinada**”. Pues bien, esta acepción no figuraba en la edición del diccionario de 1970.*

La sucesión de Fibonacci se ha popularizado a raíz de la publicación de la obra *El código da Vinci* de Dan Brown. La ocasión es propicia, por tanto, para desarrollar un taller con el que profundizar en aspectos de esta sucesión tales como la obtención de su término general, sus propiedades, la relación de la sucesión con el número áureo, la presencia de términos de esta sucesión en determinados elementos de la naturaleza, etc.

	se trata de una especie de travesura matemática? Fache no entendía cómo podía tener semejante desfachatez. No sólo lo había interrumpido de aquella manera, sino que ahora intentaba convencerlo de que Saunière, en los instantes finales de su vida, se había despedido con un gag matemático. —Este código —insistió Sophie, es simple hasta el absurdo. Jacques Saunière debe de haber sido consciente de que lo descifrábamos al momento. —Se sacó un trozo de papel del bolsillo del suéter y se lo dio al capitán. —Aquí lo tiene descifrado. Fache lo estudió. 1-1-2-3-5-8-13-21 —¿Qué es esto? —exclamó—. ¡Pero si lo único que ha hecho ha sido colocar los números en orden ascendente! Sophie se atrevió a esbozar una sonrisa satisfecha. —Exacto. El capitán bajó la voz hasta convertirla en un susurro gutural. —Agente Neveu, no tengo ni idea de adónde pretende llegar con esto, pero le sugiero que llegue rápido.
---	---

Otro aspecto que suele presentar dificultades de comprensión en parte del alumnado es la utilización de los subíndices para la notación de los términos de una sucesión cuando se expresa de forma general. Es importante cerciorarse de la certera comprensión de esta notación pues de no ser así, tendrá repercusiones en el desarrollo posterior de la unidad.

Se presentarán también ejemplos de sucesiones que se construyen mediante un soporte visual (recubrimientos con baldosas, números triangulares, cuadrangulares, etc.,) que se utilizarán como modelos para llegar al concepto de término general.

Se va a introducir el concepto de límite de una sucesión que, como es sabido, a la ciencia le costó muchos siglos conseguir definirlo con rigor. Es

conocida, por tanto, la dificultad del concepto por lo que se hace necesaria, además de una madurez intelectual, que ya poseen los alumnos al llegar a este nivel, conseguir utilizar una metodología y unos recursos apropiados. Las nuevas tecnologías, por ejemplo, permitirán ayudar a una mayor comprensión, tanto de forma gráfica como numérica.

Se aconseja que la metodología sea activa, en el sentido de propiciar una gestión del aula que, procure, que el alumnado vaya participando y desarrollando cuanto se le plantee durante el transcurso de la explicación. En la primera parte dedicada a los procesos sucesivos puede seguirse el método de leer el texto en voz alta para todo el grupo (bien por el profesor o por alumnos) e ir realizando al mismo tiempo las actividades que se proponen hasta llegar a la idea de sucesión.

Dada la dificultad de los conceptos de la unidad, en una primera fase debe trabajarse de forma individual. Posteriormente se propondrán tareas, para preparar en equipos, que contengan resolución de ejercicios, desarrollo de investigaciones, búsqueda de información en internet, elaboración de memorias, etc. todo ello en consonancia con el desarrollo de las competencias, tal como indican las recientes corrientes pedagógicas.

Dentro de las directrices que estamos sugiriendo, hay un aspecto de esta unidad que nos parece destacable y al que debemos prestar la máxima atención: se va a introducir el concepto de límite. Como es sabido, se trata de una idea central de las matemáticas y por eso hay que procurar conseguir que se comprenda, además de enseñar algunos algoritmos de cálculo de límites.

El uso de la calculadora permite resolver los ejercicios de forma rápida y segura. Es imprescindible su utilización en esta unidad.

Objetivos específicos

- Aprender y comprender los conceptos ligados a las sucesiones, para incorporarlos al lenguaje, con el fin de comunicarse de forma más precisa y rigurosa.
- Reconocer estos elementos matemáticos en el entorno.
- Comprender la necesidad de manejar, con soltura, lo estudiado previamente para propiciar el avance del conocimiento.
- Captar el rigor del razonamiento matemático en los procesos de deducción de las fórmulas que aparecen en las progresiones.
- Llegar a expresar las definiciones utilizando el lenguaje formal.
- Conseguir dar el paso a la abstracción.
- Comunicar por escrito el proceso seguido en la resolución de las situaciones problemáticas en las que aparecen sucesiones.

- Saber organizar las fórmulas que se introducen en la unidad (término general de las progresiones, suma de términos, etc.) identificando las necesarias para resolver los problemas que se proponen.
- Adquirir destreza (limpieza, orden, explicación de los procesos, etc.) en la presentación por escrito de los ejercicios y problemas que se propongan.
- Incidir en la competencia de la comunicación oral, transmitiendo a otros las definiciones y propiedades aprendidas.
- Buscar informaciones en internet.
- Manejar con soltura la calculadora para realizar las operaciones que se necesitan en la resolución de los problemas y deducciones.

Conocimientos previos.

En esta unidad, como en casi todas, se requiere que el alumnado tenga presentes un conjunto de ideas y de algoritmos que han sido estudiados con anterioridad. Es aconsejable dedicar un tiempo a recordarlos antes de iniciar la explicación de los contenidos. En la propia definición formal de sucesión, por ejemplo, se utilizan los conjuntos numéricos de los naturales N y el de los reales R . En esa misma definición aparece el término “aplicación” con todos los elementos que contiene (conjunto de partida, conjunto de llegada, etc.). Cuando se llega a la expresión del término general de una sucesión o a cualquiera de las otras fórmulas de este tema, será necesario manejar las expresiones algebraicas que resultan y, por tanto, se debe dedicar un tiempo a repasar las ideas de expresión algebraica de una fórmula así como a recordar cómo determinar el valor numérico para valores de la variable, despejar algebraicamente los elementos de la fórmula, etc.

Por todo ello, es conveniente hacer una prueba sondeo que nos informe sobre los conocimientos previos y así tener datos para organizar esas tareas de repaso.

Prueba sondeo.

En cada situación se orientará esta prueba en función de los contenidos previos que hayan cursado los estudiantes. A continuación se propone un ejemplo que, por los ítems que contiene, se puede deducir cuáles son los conocimientos previos que, se supone, han sido adquiridos. La prueba consta de varios ítems sencillos e inciden en los distintos conjuntos numéricos, la idea de aplicación, saber qué es una fórmula y obtener valores numéricos para valores concretos de la variable, despejar una variable en una fórmula, etc.

No se autoevaluará.

Ejemplo de prueba sondeo.

1.- Recordamos que los siguientes conjuntos numéricos se han estudiado en cursos anteriores:

N = naturales; Z = enteros; Q = racionales; R = reales.

Se pide corregir los cinco errores que hay en las siguientes relaciones:

$-3 \in N$	$-\frac{2}{3} \notin Q$	$4 \in Z$	$4 \in N$	$0'25 \in Z$	$2'015 \in Q$
$\sqrt{2} \in Q$	$-1 \in R$	$\frac{8}{4} \notin Z$	$0'5 \notin N$	$\sqrt{12} \in R$	$\frac{9}{4} \notin Z$

2.- Dada la expresión: $5x + a = 8$

a) despejar x.

b) despejar a.

3.- En la expresión $\frac{3x-4}{m} = 3$

a) despejar x.

b) despejar m.

4.- Se define la aplicación

$$f : Z \rightarrow R$$

$$x \rightarrow f(x) = 5x - 7$$

a) Obtener la imagen de: $x = 0$ $x = -1$ $x = 0,5$

b) ¿Cuál es el valor de x si su imagen toma el valor - 8?

Proceso sucesivo. Definición de sucesión.

Situación 1.- Queremos hacer una ficha de cada uno de los 165 libros que hay en una estantería de la biblioteca del colegio.

Podemos proceder de la siguiente forma: se colocan en la estantería siguiendo un determinado orden (alfabético, por especialidades, por tamaño, etc.) y a continuación vamos asignando un número de orden en el lomo, para que quede visible a la hora de localizarlo. Así pues, en el primero de la izquierda colocamos el 1, en el siguiente el 2 y así sucesivamente hasta llegar al último que llevará el número 165 (figura 1).

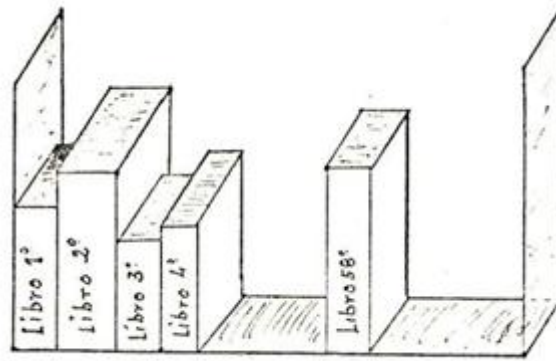


Fig. 1

Situación 2.- Me acerco a la cola de la taquilla de un cine y deseo averiguar qué lugar ocuparé cuando me coloque en el último lugar. Iré contando las personas que están: 1, 2, 3,... y así hasta llegar a la última. Mi número en la cola será el siguiente (figura 2).

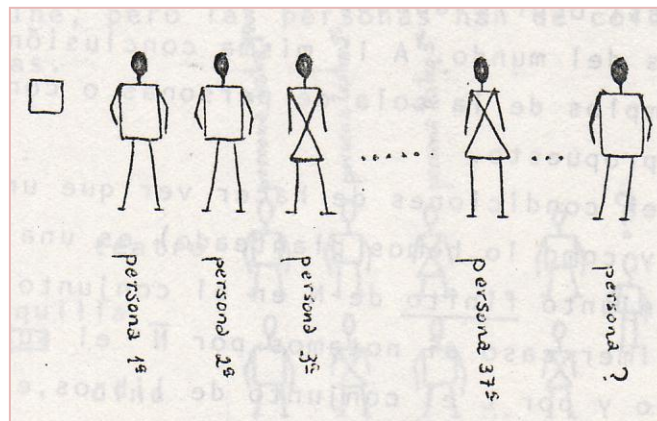


Fig. 2

Situación 3.- Me sitúo al principio de una calle y observo que las casas de una acera tienen los números 2, 4, 6,... mientras que las casas que están en la acera de enfrente están numeradas con los números 1, 3, 5,...

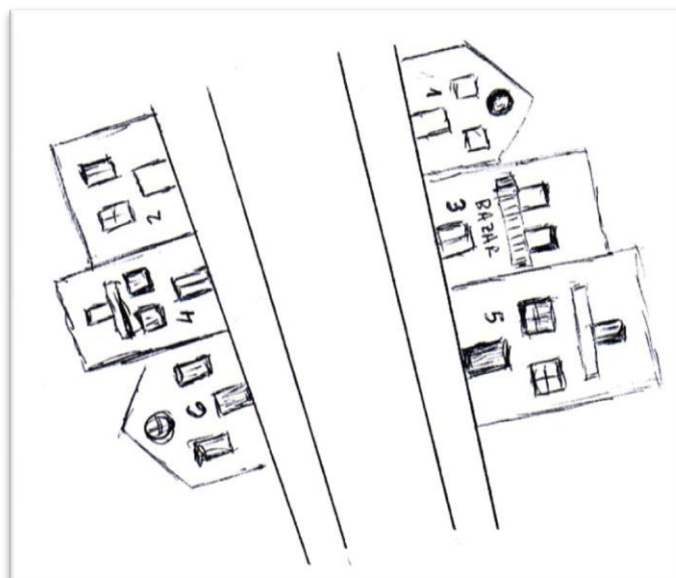


Fig. 3

Situación 4.- Tomo un número natural cualquiera, por ejemplo el 7 y, de forma sucesiva, iré sumando 4. En este caso, tendré los siguientes resultados: 7, 11, 15, 19, 23,...

Pues bien, en las situaciones relatadas, pese a que se trata de casos totalmente distintos, hay sin embargo, algunos aspectos que son comunes a todas. Esos son los que debemos tratar de mostrar a los alumnos mediante preguntas que les conduzcan a identificarlos, pedirles que reflexionen sobre ellos, que vayan explicando con su lenguaje coloquial para pasar luego a la formalización. Entre esos aspectos destacan:

- En todos los casos hay un primer elemento del conjunto de objetos.
- Se dispone de una pauta segura e inequívoca para pasar de un objeto al siguiente.
- Se va asignando a cada elemento del conjunto en el que se trabaja (personas, libros, casas, números) un número de orden, es decir: en todos los casos hay un primer elemento, un segundo, un tercero, etc.

Actividad

Pedir a cada estudiante que trate de encontrar otros procesos sucesivos en su entorno habitual.

Aparecerán procesos como: el número de la cédula de identidad, la placa de los autos, la numeración de las butacas de un cine, las temperaturas máximas de los días de un mes, etc.

Sin embargo, (poner énfasis en este momento), hay un aspecto que es común a los tres primeros casos pero que “falla” en el cuarto.

Actividad

Escribir qué aspecto o aspectos se observan en la situación 4 que la hacen distinta de las tres anteriores.

Las respuestas a esta actividad deben plantearse y discutir entre todos las propuestas. ¿Cuál es la diferencia que buscamos? Por muchos libros que contenga nuestra estantería, siempre llegaremos a un último libro y lo mismo ocurre con las personas que haya en la cola del cine o en ambas aceras de la calle siempre habrá una última casa en cada lado. Por tanto, es común a estas tres situaciones la existencia de un último elemento. Pensemos ahora en la cuarta situación: el proceso sucesivo consiste en ir sumando 4 a cada resultado anterior a partir del siete y esta es la pregunta cuya respuesta debe quedar clara al alumnado: ¿cuál es el último elemento de este proceso sucesivo?

Podemos concluir, por tanto, en la siguiente observación:

Los tres primeros procesos sucesivos son “finitos” en el sentido de que siempre llegaremos a un último elemento, mientras que

el cuarto es un proceso que podemos calificar de "infinito" porque no es posible determinar cuál es el último elemento al que podemos llegar.

A continuación tratamos de formalizar las conclusiones a las que se ha llegado en las situaciones planteadas. Las figuras 1, 2 y 3 ponen de manifiesto que cada elemento de los distintos conjuntos (que en adelante llamaremos **término**) puede ser identificado por su número de orden. Es decir que tomado, por ejemplo, el número 5, se tiene el libro 5º, persona 5ª y, en cada acera, la casa 5ª. Si prescindimos del aspecto ordinal, podemos concluir que, en definitiva, se trata de una aplicación de un subconjunto de los números naturales en cada uno de los conjuntos como vemos a continuación:

Notaremos por:

L = conjunto de los libros de la estantería.

P = conjunto de las personas de la cola de la taquilla del cine.

I = casas de la acera izquierda (impares).

D = casas de la acera derecha (pares).

Situación 1	Situación 2	Situación 3 (I)	Situación 3 (D)
$N \rightarrow L$ $1 \rightarrow \text{libro } 1$ $2 \rightarrow \text{libro } 2$... $n \rightarrow \text{libro } n$	$N \rightarrow P$ $1 \rightarrow \text{persona } 1$ $2 \rightarrow \text{persona } 2$... $m \rightarrow \text{persona } m$	$N \rightarrow I$ $1 \rightarrow \text{casa } 1$ $2 \rightarrow \text{casa } 2$... $p \rightarrow \text{casa } p$	$N \rightarrow D$ $1 \rightarrow \text{casa } 1$ $2 \rightarrow \text{casa } 2$... $q \rightarrow \text{casa } q$

Pero la notación utilizada en ese cuadro es complicada por lo que trataremos de simplificarla. Para ello, tomaremos la letra **a** para nombrar a los libros de la estantería y como necesitamos distinguir uno de otro, entonces asignamos a cada uno el lugar de orden que ocupa mediante un subíndice. Así, a_1 representa al primer libro; a_2 es el segundo; a_5 será el quinto libro y así con todos. Si utilizamos la letra **b** para las personas de la cola, entonces, por ejemplo, b_3 es la tercera persona. Si las casas de la acera izquierda las designamos con la letra **c** y las de la derecha, con la **d**, se tiene que c_7 será la casa séptima de la acera izquierda mientras que d_6 es la casa sexta de la otra acera.

Los "números" n , m , p y q son los asignados al último término de cada conjunto que, obviamente, no tienen por qué ser iguales y por eso se toman distintas letras. Por tanto, con la notación que hemos adoptado, esos últimos términos son, respectivamente:

$$a_n, b_m, c_p \text{ y } d_q$$

En la situación 3 (los números asignados a las casa de la calle), conviene tener claro lo siguiente: una cosa es el número de orden que ocupa cada casa y otra distinta es el número que tiene la casa. Así, por ejemplo, en la acera de los impares, la casa c_7 es la que tiene el número 13.

Actividad

Obtener los números de las casas c_3, c_{12}, d_6, d_{13}

Podemos dar, finalmente, un paso más y abstraer la idea por completo con esta definición:

Definición Un **proceso sucesivo finito** es una aplicación cuyo conjunto de partida es un subconjunto $\underline{N}$ del conjunto de los números naturales N y el de llegada es un conjunto A de objetos, de tal forma que, a cada número n de $\underline{N}$ le corresponde el objeto a de A que identificaremos mediante la notación a_n

Es decir:

$$\underline{N} \rightarrow A$$

$$n \rightarrow a_n$$

Vamos a analizar, finalmente y con detalle, la situación 4 que es la que nos lleva al concepto de sucesión. Nos preguntábamos ¿qué ocurre en la situación 4 que la hace distinta de las anteriores?

Ya vimos que la diferencia radica en que este proceso es “infinito” y, por tanto, el conjunto de partida es todo N . Si representamos por M el conjunto de los números que se van formando con ese proceso, entonces la situación 4 la podemos esquematizar de la siguiente forma, si mantenemos la letra a para designar a los términos de M :

$$N \rightarrow M$$

$$n \rightarrow a_n$$

Pues bien, como hemos adelantado, este último cuadro nos conduce a una definición formal de sucesión numérica. La condición que debemos añadir para formalizar del todo el concepto es que el conjunto de llegada sea el de los números reales R , porque las sucesiones que vamos a estudiar están formadas por números de este conjunto:

Definición Una **sucesión** es una aplicación del conjunto de los números naturales N en el conjunto de los números reales R de forma que, a cada número natural n , le corresponde un número real que notaremos por a_n , es decir:

$$N \rightarrow R$$

$$n \rightarrow a_n$$

Algunas consideraciones:

- La idea de presentar la sucesión como un proceso sucesivo infinito de números tiene solo una finalidad didáctica, pues, se trata de asociarla a procesos de la vida cotidiana como los descritos en las tres primeras situaciones.
- Es importante recalcar que en la sucesión numérica, que ya se ha definido, una cosa es el valor del término de la sucesión y otra es el lugar que ocupa dentro de ella, que viene señalado por el subíndice que se utiliza con la letra escogida.
- Cada uno de los números que forman la sucesión recibe el nombre de *término de la sucesión*.
- La letra utilizada para notar el término a_n puede ser sustituida por cualquier otra letra y conviene poner ejemplos aclaratorios.

Ejemplos de sucesiones.

Antes de formalizar aspectos, como el de la obtención del término general de una sucesión, vamos a trabajar más ejemplos para captar que se trata de la generación de números siguiendo pautas preestablecidas que no siempre son fáciles de determinar. Cuando estas pautas no existen, entonces se tienen los conocidos como *números aleatorios* que se estudian en otro tema.

Rebotes.

Tenemos tres tipos de pelotas: a, b y c. Las pelotas del tipo a rebotan hasta un 80% de la distancia desde la que se suelta. Las del tipo b rebotan hasta un 50% y las del c lo hacen hasta un 40%. Si se sueltan desde 2 m de altura, ¿qué altura alcanzan los cuatro primeros rebotes de cada pelota?

Una manera de organizar lo solicitado es la siguiente:

	Bote 1º	Bote 2º	Bote 3º	Bote 4º
a	1,6	1,28		
b				
c				

Teselado con hexágonos.

Se tiene la siguiente secuencia de colocación de baldosas hexagonales:

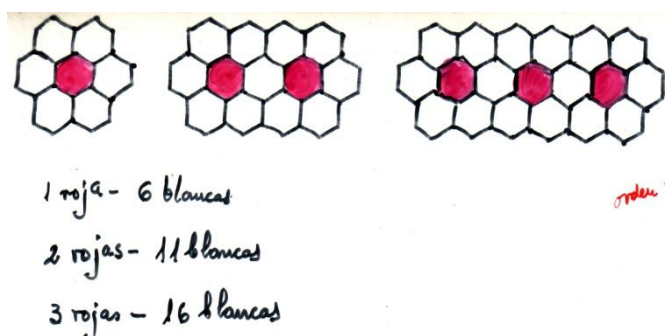


Fig. 4

Nos planteamos el tratar de descubrir la pauta que nos permita saber cuántas baldosas blancas se necesitan cuando se coloquen, por ejemplo, 30 de las rojas.



Taller: Sucesión de Fibonacci

Se trata de un ejemplo de sucesión en la que el término general no es una fórmula que depende de n sino que cada término se construye en función de los dos anteriores. Se ha preparado un power point con una guía de las imágenes que se aconseja leer antes de proceder a la proyección. Para el desarrollo del taller es conveniente tener, si es posible, varias piñas de pinos y una piña tropical.

Sucesiones numéricas. Término general.

Los siguientes conjuntos de números son sucesiones que siguen una determinada ley de formación, que se ha de obtener, en cada caso, escribiendo los dos términos siguientes:

- a) 2, 4, 6, 8, 10, __ __
- b) 4, 4, 4, 4, 4, __ __
- c) 7, 11, 15, 19, 23, __ __
- d) 1, 4, 9, 16, 25, __ __
- e) 1, 2, 4, 8, 16, __ __

Las respuestas a la cuestión planteada están en el siguiente cuadro aunque de forma desordenada. Compruebe si coinciden con las suyas:

36, 49	4, 4	27, 31	12, 14	32, 64
--------	------	--------	--------	--------

Si ha acertado las respuestas en el ejercicio anterior, estamos en condiciones de abordar la obtención del término general de una sucesión. Se trata de saber cómo se pasa de un término al siguiente y cómo se relaciona con el número de orden del término. Observemos el primer ejemplo:

$$a_1=2; a_2=4=2+2; a_3=6=2+2 \times 2; a_4=8=2+3 \times 2; a_5=10=2+4 \times 2$$

La cuestión a resolver es: ¿cómo podemos expresar a_n en función del valor de n ?

En este caso, se tiene: $a_n = 2 + (n - 1) \times 2$

La expresión obtenida es el término general de la sucesión del ejemplo a)

Trate de obtener el término general de las otras sucesiones propuestas. Cuando haya terminado, mire las soluciones al final del tema y contrástelas con sus respuestas.

Llegamos así a uno de los conceptos importantes en el estudio de las sucesiones:

El término general de una sucesión es la expresión que permite calcular sus términos en función de su número ordinal.

Los números primos.

Si tratara de encontrar los dos siguientes términos de esta sucesión: 1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19,... comprobará que no existe una ley de formación como las que fue encontrando en los casos anteriores. En efecto, se trata de la sucesión de números primos

para los que tal ley no es posible determinarla. Con esto se pone de manifiesto que existen sucesiones cuyos términos se obtienen siguiendo criterios que no responden a regularidades sino a propiedades. No les dedicaremos más atención en esta unidad.

Términos de la sucesión.

Nos planteamos ahora el problema recíproco, esto es, conocido el término general, vamos a obtener términos de la sucesión:

Dadas las siguientes sucesiones, obtener, en cada caso, los términos que se indican y comprobar los resultados obtenidos con las soluciones que figuran al final del tema.

- | | | |
|----|---------------------------------|-----------------------------|
| a) | $a_n = 2n - 1$ | a_1, a_4, a_{10}, a_{43} |
| b) | $b_n = (-1)^n$ | $b_1, b_2, b_{15}, b_{104}$ |
| c) | $c_n = 6n - 3$ | c_1, c_2, c_3, c_{15} |
| d) | $d_n = 2^n + 5n$ | d_1, d_3, d_6, d_{10} |
| e) | $e_n = \frac{3n^2 + 5}{2n + 3}$ | $e_1, e_3, e_5, e_{10},$ |

Una clasificación de las sucesiones.

Las sucesiones estudiadas hasta ahora permiten hacer la siguiente clasificación: dada la sucesión $a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_n$, se dice que es

Creciente si $a_i < a_{i+1}$, para $i = 1, 2, 3, \dots$

Decreciente si $a_i > a_{i+1}$, para $i = 1, 2, 3, \dots$

Constante $a_i = a_{i+1}$, si para $i = 1, 2, 3, \dots$

Oscilante si los términos de la sucesión tienen distinto signo de manera alternativa.

Progresiones.

En esta sección vamos a estudiar dos tipos especiales de sucesiones conocidas como *progresiones aritméticas* y *progresiones geométricas*. Ambas aparecen ligadas a diversas situaciones cotidianas y su estudio no debe ofrecer excesivas dificultades. Es importante asegurarse de que los estudiantes han entendido las definiciones porque de ellas se desprenden casi todos los demás conceptos y fórmulas. Recuérdese que en algunos de los problemas de este tema se hace uso del despeje de elementos de una fórmula por lo que deberá comprobar que lo manejan con habilidad y seguridad.

Progresiones aritméticas.

En estas sucesiones, tras la definición, estudiaremos tres cuestiones con las que se pueden abordar los problemas que se planteen. Se trata de las fórmulas que dan la expresión del término general y la suma de n términos de la sucesión y un proceso conocido como interpolación de términos entre dos números dados.

Ejemplos de progresiones aritméticas:

a) 5, 9, 13, 17, 21, ...

b) 65, 72, 79, 86, 93, ...

c) 16, 10, 4, - 2, - 8, ...

d) $\frac{7}{5}, \frac{31}{15}, \frac{41}{15}, \frac{51}{15}, \dots$

e) 0'72, 0'95, 1'18, 1'41, 1'64, ...

Se observa que todos los ejemplos propuestos tienen una propiedad común, es decir, que se repite en todos los casos del mismo modo: para pasar de un término al siguiente se suma o se resta una cantidad que es constante en cada caso. Obtenerla y comprobarlo en las soluciones dadas al final. Es posible que algunos estudiantes descubran que lo que ocurre es que la diferencia entre dos consecutivos es siempre la misma en cada caso. Hacer ver la equivalencia de las dos formas.

Esta es la propiedad que nos permite dar la definición:

Definición

Una **progresión aritmética** es un conjunto de números tales que, fijado el primero, uno cualquiera de ellos se obtiene sumando al anterior una cantidad constante llamada **diferencia** de la progresión.

La diferencia la notaremos con la letra d que, obviamente, puede ser positiva o negativa.

Término general. La obtención del término general es un proceso de gran riqueza didáctica por la gran cantidad de elementos que utiliza: deducción, generalización, uso del álgebra, etc.

Una vez entendido el concepto, una forma de hacerlo es la siguiente:

Sean $a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_{n-1}, a_n$ los términos de una progresión aritmética de diferencia d . Teniendo en cuenta la definición, vamos a deducir la fórmula del término general apoyándolo con un ejemplo numérico:

Primer término: a_1 Diferencia: d	Primer término: $a_1=8$ Diferencia: $d=6$
$a_2=a_1+d$	$a_2=8+6=14$
$a_3=a_2+d=a_1+d+d=a_1+2d$	$a_3=a_2+d=8+6+6=8+2 \cdot 6=20$
$a_4=a_3+d=a_1+2d+d=a_1+3d$	$a_4=a_3+d=8+2 \cdot 6+6=8+3 \cdot 6=26$
...	...
$a_n=a_{n-1}+d=a_1+(n-1)d$	$a_n=8+(n-1)6=8+6n-6=6n+2$

Se tiene, por tanto que:

$$a_n = a_1 + (n - 1)d$$

Obsérvese que en el ejemplo numérico se llega a una expresión que depende de n que, como ya es sabido, es la que indica el número de orden del elemento de la sucesión. Insistir en esta idea solicitando a los estudiantes que obtengan los términos generales de las progresiones anteriores y que calculen términos avanzados. Otro ejercicio a proponer es el de despejar todos los elementos que figuran en la fórmula: a_1 , n y d .

Suma de los términos de una progresión aritmética.

Gauss y su famosa suma

Un buen modo de iniciar este apartado es recurriendo a la anécdota atribuida a Gauss (1777, 1855) que, en una versión simplificada, viene a decir así:

Siendo Carlos Federico un alumno de escuela, el maestro les solicitó que sumaran los números del 1 al 100. Unos empezaron sumando los primeros, otros por el final, con orden, con cuidado para no equivocarse, etc. Pero nuestro personaje “descubre” que $1 + 100 = 101 = 2 + 99 = 3 + 98 \dots$ Por tanto, calcula $101 \times 50 = 5050$ y obtiene el resultado final rápidamente. Puede adornarse la historia con más elementos escénicos...

La anécdota de Gauss nos pone sobre la pista de lo que se necesita para llegar a la fórmula. En efecto, la deducción de la fórmula que da la suma de los términos de una progresión aritmética se basa en la propiedad que “descubrió” Gauss para resolver su problema: en una progresión de este tipo, la suma de los términos equidistantes (= que están a la misma distancia) de los extremos es igual a la suma de éstos.

Si se toma, por ejemplo, la progresión formada por 33, 28, 23, 18, 13, 8 se tiene:

33	+	28	+	23	+	18	+	13	+	8		S= 123
8	+	13	+	18	+	23	+	28	+	33		S= 123
41	+	41	+	41	+	41	+	41	+	41		S= 246

Vemos que las sumas de los términos equidistantes de los extremos coinciden y, en consecuencia, si se multiplica esa cantidad por el número de sumandos (que coincide con el número de términos), se obtiene el doble del valor de la suma. Basta, por tanto, con dividir por 2 el resultado final.

Pasemos a la obtención de la **fórmula general**:

Sean $a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_{n-1}, a_n$ los n términos de una progresión aritmética. Se tiene que:

S =	a_1	+	a_2	+	a_3	+	...	a_n
S =	a_n	+	a_{n-1}	+	a_{n-2}	+	...	a_1
2S =	$a_1 + a_n$	+	$a_2 + a_{n-1}$	+	$a_n + a_{n-2}$	+	...	$a_n + a_1$

Teniendo en cuenta que en la fila inferior hay n sumandos iguales, se deduce que: $2S = (a_1 + a_n) n$

De donde se tiene la fórmula final:

$$S = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$$

Interpolación de términos.

Con las dos fórmulas deducidas se tiene toda la teoría de las progresiones aritméticas necesarias para resolver los problemas que se planteen en estos niveles. Veamos, por ejemplo, cómo se puede enfocar la interpolación. Dados dos números cualesquiera, se trata de colocar en medio de ellos otros números de manera tal, que todos formen una progresión aritmética.

Ejemplo: se dan el 12 y el 18 y se desea interpolar aritméticamente 4 términos. Por tanto, al final se tendrá una progresión aritmética de 6 términos cuyos extremos son 12 y 18.

¿Qué necesitamos para formar la progresión?: la diferencia. Pero con los datos que se tienen se puede calcular pues $a_1 = 12$; $a_6 = 18$ y $n = 6$. Despejando d en la fórmula que da el término general se tiene:

$$d = \frac{18 - 12}{6 - 1} = \frac{6}{5} = 1,2$$

Podemos decir, en general, lo siguiente:

Se deben proponer ejercicios en los que sea necesario utilizar las fórmulas deducidas. Se comprobará la necesidad de tener habilidad en el despeje de incógnitas de una fórmula.

Ejercicios

1. Determinar las condiciones que deben darse en una progresión aritmética para que sea creciente, decreciente o constante.
2. Si calcula la suma de los números impares de forma acumulativa, esto es: 1 , $1+3$, $1+3+5$, $1+3+5+7$,... se va obteniendo un resultado que le sorprenderá. Trate de relacionar ese resultado con la construcción de cuadrados con puntos en la forma siguiente:

- Un reloj da las campanadas marcando las horas. Se trata de una progresión aritmética. Calcular cuántas campanadas da ese reloj al cabo del día.
- Calcular la suma de todos los múltiplos de 7 comprendidos entre 100 y 1000. (Ejercicio interesante)
- Calcular la suma de los 20 primeros múltiplos de 7.

Progresiones geométricas.

Historia del ajedrez (leyenda)

Es una buena forma de iniciar este apartado. Se trata de una leyenda de la que existen muchas versiones a las que cada uno le puede añadir los elementos accesorios e imaginativos que desee. En esencia lo que interesa es lo siguiente:

El joven enseña al rey (o al maharajá si se decide ambientarla en la India) a jugar al ajedrez y éste, agradecido decide obsequiarle con lo que pida. El joven le pide un grano de trigo (o de arroz) en el cuadrado de la esquina del tablero; 2 en el de al lado, 4 en el siguiente y va duplicando el número de granos cada vez que avanza un cuadrado y así hasta llegar al último cuadrado que es el que hace el número 64.

La leyenda da cuenta de lo casi imposible que le resulta al rey cumplir su promesa. Con una calculadora se pueden ir obteniendo el sucesivo número de granos que, posteriormente, habrá que sumar.

Si se quiere ampliar el ejercicio aunque se desvíe de la introducción de las progresiones geométricas, se puede comprobar que se necesitan 40 granos arroz para que pesen un gramo. Fijando esa cantidad, se puede intentar calcular, de momento, cuantos barcos de 200 000 toneladas (así son esos enormes barcos que transportan el petróleo) se necesitan para transportar el arroz que habría que depositar solo en el último cuadrado.

Para la introducción contamos también con cierto paralelismo que existe con las progresiones aritméticas y sin más preámbulos pasamos a la definición.

Ejemplos de progresiones geométricas:

- a) 3, 6, 12, 24, ...
- b) 0'5, 2'5, 12'5, 62'5, ...
- c) 3, 1'5, 0'75, 0'375, ...
- d) 1, - 2, 4, - 8, 16, ...

Se observa que todos los ejemplos propuestos tienen una propiedad común, es decir, que se repite en todos los casos del mismo modo: para pasar de un término al siguiente se multiplica o se divide por una cantidad que es constante en cada caso. Obtenerla y comprobarlo en las soluciones dadas al final. Es posible que algunos estudiantes descubran que lo que ocurre es que el cociente entre dos términos consecutivos es siempre el mismo. Hacer ver la equivalencia de las dos formas.

Esta es la propiedad que nos permite dar la definición:

Definición Una **progresión geométrica** es un conjunto de números tales que fijado el primero, uno cualquiera de ellos se obtiene multiplicando el anterior por una cantidad constante llamada **razón** de la progresión.

La razón la notaremos con la letra r para la que vamos a imponer la restricción $r > 0$, (luego veremos por qué se hace aunque el ejemplo anterior nos pone sobre la pista).

Término general.

Sean $a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_{n-1}, a_n$ los términos de una progresión geométrica de razón r .

Teniendo en cuenta la definición, vamos a deducir la fórmula del término general apoyándolo con un ejemplo numérico:

Primer término: a_1 Razón = r	Primer término: $a_1 = 3$ Razón = 2
$a_2 = a_1 \cdot r$	$a_2 = 3 \cdot 2 = 6$
$a_3 = a_2 \cdot r = a_1 \cdot r \cdot r = a_1 \cdot r^2$	$a_3 = a_2 \cdot r = 3 \cdot 2 \cdot 2 = 3 \cdot 2^2 = 12$
$a_4 = a_3 \cdot r = a_1 \cdot r^2 \cdot r = a_1 \cdot r^3$	$a_4 = a_3 \cdot r = 3 \cdot 2^2 \cdot 2 = 3 \cdot 2^3 = 24$
...	...
$a_n = a_{n-1} \cdot r = a_1 \cdot r^{n-1}$	$a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$

Se tiene, por tanto que:

$$a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$$

Obsérvese que en el ejemplo numérico se llega a una expresión que depende de n que, como ya es sabido, es la que indica el número de orden del elemento de la sucesión. Insistir en esta idea, solicitando a los estudiantes que obtengan los términos generales de las progresiones anteriores. Otro ejercicio a proponer es el de despejar todos los elementos que figuran en la fórmula: a_1 , n y r . La n es la que puede tener alguna dificultad al despejarla.

Producto de los términos de una progresión geométrica.

En las progresiones geométricas, el producto de los términos equidistantes de los extremos es igual al producto de éstos, es decir, es constante. Lo comprobaremos, por ejemplo, en la "progresión del ajedrez" que, como vemos es la sucesión de las potencias de 2. Utilizando los ocho primeros términos se tiene:

$$1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128 \rightarrow 1.128 = 2.64 = 4.32 = 8.16$$

En consecuencia, podemos obtener una fórmula que nos dé el producto de los términos de una progresión aritmética siguiendo una deducción parecida a como deducimos la suma en las progresiones aritméticas:

P =	a_1	.	a_2	.	a_3	.	...	a_n
P =	a_n	.	a_{n-1}	.	a_{n-2}	.	...	a_1
$P^2 =$	$a_1 \cdot a_n$	.	$a_2 \cdot a_{n-1}$	.	$a_n \cdot a_{n-2}$	.	...	$a_n \cdot a_1$

Teniendo en cuenta que en la fila inferior hay n factores iguales, se deduce que:

$$P^2 = (a_1 \cdot a_n)^n$$

De donde se tiene la fórmula final:

$$P = \sqrt{(a_1 \cdot a_n)^n}$$

Interpolación de términos.

El concepto de interpolación ya fue estudiado en las progresiones aritméticas y aquí se mantiene. Por eso podemos escribir lo siguiente:

Definición **Interpolar** n términos geométricos (también se les suele designar como medios proporcionales) entre a y b consiste en formar una progresión geométrica de n+2 términos cuyos extremos son a y b.

Igual que allí, la solución pasa por obtener la razón deduciéndola de la fórmula del término general. Veamos un ejemplo:

Interpolar cuatro términos geométricos entre 2 y 72.

En la fórmula que da el término general de la progresión geométrica es en la que debemos despejar la razón de la progresión que deseamos formar:

$$a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$$

Sabemos que $n = 6$; $a_n = a_6 = 72$; $a_1 = 2$ y, por tanto:

$$72 = 2 \cdot r^{6-1} = 2 \cdot r^5 \Rightarrow r^5 = \frac{72}{2} = 36 \Rightarrow r = \sqrt[5]{36}$$

La progresión geométrica es:

$$2; 2\sqrt[5]{36}; 2(\sqrt[5]{36})^2; 2(\sqrt[5]{36})^3; 2(\sqrt[5]{36})^4; 72$$

Obtener con la calculadora los valores decimales de los términos de esa progresión aproximándolos hasta las centésimas.

Suma de los términos de una progresión geométrica.

En estas progresiones, nos podemos plantear también el cálculo de la suma de todos sus términos, tanto si es un número finito como, en algunos casos, si se trata de **¡Una progresión de infinitos términos!** Esta es una situación nueva que conviene tratar con claridad y rigor.

Sean $a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_{n-1}, a_n$ los n términos de una progresión geométrica. Recordemos que, por la propia definición, se tiene que:

$$a_2 = a_1 \cdot r; \quad a_3 = a_2 \cdot r; \quad a_n = a_{n-1} \cdot r$$

El siguiente cuadro nos va a conducir a la fórmula:

En la primera fila se tiene la suma de los términos. En la segunda se han multiplicado todos por la razón r . Posteriormente las restamos y es en este paso cuando debe tenerse en cuenta lo recordado:

$S =$	a_1	+	a_2	+	a_3	+	...	a_n
$S \cdot r =$	$a_1 \cdot r = a_2$	+	$a_2 \cdot r = a_3$	+	$a_3 \cdot r = a_4$	+	...	$a_n \cdot r$

$$S \cdot r - S = a_n \cdot r - a_1 \Rightarrow S(r - 1) = a_n \cdot r - a_1 \Rightarrow$$

$$S = \frac{a_n \cdot r - a_1}{r - 1}$$

Suma de los infinitos términos de una progresión geométrica.

Potencias sucesivas de un número comprendido entre 0 y 1.

En este recuadro vamos a estudiar, con la ayuda de la calculadora, el comportamiento de las potencias sucesivas de un número comprendido entre 0 y 1. Es decir, sea $a \in (0,1)$.

Tomar la calculadora. Rellenar el siguiente cuadro en el que, como se puede observar, se han tomado tres valores del intervalo indicado: 0'3; 0'5; 0'85 y se piden algunas potencias de ellos. Escribir solo las dos primeras cifras decimales de los resultados que nos de la calculadora pero, lo más importante, es observar **cómo las cantidades obtenidas son cada vez más pequeñas**. En la última columna se trata de encontrar cuál es la primera potencia con la que la calculadora muestra el valor cero en la pantalla. El valor de n que se indica en esta columna es orientativo en el sentido de estar próximo al buscado.

a^n	a^2	a^4	a^{100}	a^{150}	a^{170}	$n = 189$
$a = 0'3$	0'09					0 para $n = ?$

a^n	a^2	a^4	a^{100}	a^{250}	a^{300}	$n = 325$
$a = 0'5$		$0'06$				0 para $n = ?$

a^n	a^2	a^4	a^{100}	a^{700}	a^{1350}	$n = 1401$
$a = 0'85$			$8'74 \cdot 10^{-8}$			0 para $n = ?$

El cuadro anterior nos pone sobre la pista de lo que se va a hacer a continuación. Como se indicó ya, se observa que, conforme aumenta el valor del exponente, la potencia va disminuyendo de tal manera que, **aunque sabemos que el valor de la potencia nunca será igual a cero**, la calculadora nos indica que llega a ser tan pequeño que lo identifica con el cero.

Pues bien, esta situación se expresa en matemáticas de una forma peculiar a la que llegaremos con unos pasos previos que vamos a exponer y que deben entenderse:

1.- Si $a \in (0,1)$, entonces se verifica que a^n “se aproxima a cero” cuando la “ n crece indefinidamente”.

2.-Esas expresiones entre comillas: “se aproxima a cero” y “ n crece indefinidamente” también tienen una forma de expresarse en matemáticas:

Si $a \in (0,1)$, entonces se verifica que a^n **tiende a cero** cuando la **n tiende a infinito**.

3.- Toda la frase anterior, en fin, se simplifica con la siguiente expresión cuyo significado debe quedar claro:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a^n = 0$$

Así, por ejemplo, podemos escribir:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 0,3^n = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 0,5^n = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 0,85^n = 0$$

Obviamente, el resultado se mantiene si escribimos las formas fraccionarias de esos números decimales, es decir:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{10}\right)^n = 0 \qquad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0 \qquad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{17}{20}\right)^n = 0$$

Pasemos ahora a desarrollar el título de este apartado: suma de los infinitos términos de una progresión geométrica.

Tal y como está en el enunciado pudiera pensarse que una suma de esas características, necesariamente, debe ser infinita también. Veamos que si se impone cierta restricción, esa suma **no es infinita!**

Sabemos ya que la suma de los términos de una progresión geométrica $a_1, a_2, \dots, a_n$ cuya razón es r viene dada por la fórmula:

$$S = \frac{a_n r - a_1}{r - 1}$$

Pero sabemos que el término general a_n se puede expresar así: $a_n = a_1 r^{n-1}$ por lo que podemos sustituir en la fórmula de la suma y queda:

$$S = \frac{a_1 r^{n-1} r - a_1}{r - 1} = \frac{a_1 r^n - a_1}{r - 1} = \frac{a_1 (r^n - 1)}{r - 1}$$

Es decir:

$$S = \frac{a_1 (r^n - 1)}{r - 1}$$

Pues bien, tomemos una progresión de ese tipo. Por ejemplo la siguiente:

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots, \frac{1}{2^n}, \dots$$

Se trata de una progresión geométrica cuya razón es $r = \frac{1}{2}$ y con infinitos términos que se identifica porque se escriben los puntos suspensivos colocados tras el último. Eso se interpreta como que la sucesión continúa indefinidamente. Nos planteamos calcular la suma de todos ellos, esto es, calcular

$$S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots$$

Según la última fórmula, la suma es igual a:

$$S = \frac{a_1 (r^n - 1)}{r - 1} = \frac{1 \left(\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1 \right)}{\frac{1}{2} - 1}$$

Pero sabemos que, si el número de sumandos es infinito, es decir, si n tiende a infinito, entonces, $(1/2)^n$ tiende a cero. Aplicándolo a esa expresión quedará que:

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 \left(\left(\frac{1}{2} \right)^n - 1 \right)}{\frac{1}{2} - 1} = \frac{-1}{-\frac{1}{2}} = \frac{2}{1} = 2$$

Concluimos, pues, con que esa suma de infinitos sumandos tiene por límite 2, es decir, que se acerca a 2 todo lo que se quiera pero no pasa de esa cantidad. ¡No es infinita!

Si nos fijamos en el proceso seguido, esta situación se produce **siempre que la razón de la progresión, r , sea un número comprendido entre 0 y 1**. Por tanto, si admitimos esta restricción, entonces al tomar límite en la fórmula que da la suma de los términos de la progresión geométrica se tiene el siguiente resultado:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 (r^n - 1)}{r - 1} = \frac{-a_1}{r - 1} = \frac{a_1}{1 - r}$$

En definitiva, **la suma de los infinitos términos de una progresión geométrica de razón $r \in (0,1)$** se calcula con la fórmula:

$$S = \frac{a_1}{1 - r}$$

Investigación

¿Qué ocurre si la razón, r , pertenece al intervalo $(-1, 0)$?

¿Se puede calcular la suma de los infinitos términos de una progresión geométrica cuya razón esté en esas condiciones?

Aplicaciones.

La calculadora debe ser un instrumento habitual de trabajo. Sabemos que existe una gran variedad de marcas y de modelos dentro de cada marca. Por esto es importante advertir al alumnado que conserve el libro/folleto de instrucciones. Cada cual debe saber qué proceso ha de seguir con su calculadora para hacer cualquier operación.

Recordar el cálculo de porcentajes y las propiedades de los logaritmos.

Es conveniente recordar el proceso de cálculo de un porcentaje pues van a ser utilizados con profusión en este apartado:

Si deseamos calcular el 18% de 2400, se puede proceder utilizando la regla de tres siguiente:

$$100 \rightarrow 18$$

$$2400 \rightarrow x$$

Con lo cual se tiene:

$$x = \frac{2400 \cdot 18}{100} = 432$$

En esa expresión reparemos en el cociente

$$\frac{18}{100} = 0,18$$

Se trata del *tanto por uno* en el siguiente sentido: si 18% significa que de cada 100 tomamos 18, al dividir por 100 estaremos aplicando el criterio a cada unidad, es decir, que de cada unidad tomamos 0'18.

Con este razonamiento, para calcular un porcentaje de una cantidad, bastará con multiplicar esa cantidad por el tanto por uno, es decir, por aquello que nos quedamos de cada unidad. Así, por ejemplo, si nos piden: calcular el 8% de 4300, bastará con hacer la multiplicación:

$$4300 \times 0'08 = 344$$

En cuanto a los logaritmos, recordar cómo se aplican las propiedades en expresiones como:

$$\begin{aligned} E = \frac{A^3 \cdot B^2}{C + D^2} &\Rightarrow \log E = \log \frac{A^3 \cdot B^2}{C + D^2} = \log A^3 \cdot B^2 - \log(C + D^2) = \\ &= 3\log A + 2\log B - \log(C + D^2) \end{aligned}$$

Interés simple.

Recordemos esta forma de capitalización. Veamos primero un ejemplo numérico para pasar a la fórmula general.

Partimos de un capital inicial de, por ejemplo, $C = 5000$ \$. Se deposita en un banco a un interés simple de $r = 8\%$ anual (también se le llama rédito). Esto quiere decir que, al final del primer año, se tienen los 5000 iniciales más los que han producido en ese tiempo que son el 8% de 5000, esto es:

$$\frac{5000 \cdot 8}{100} = 400\$$$

Por lo tanto, si retiramos el dinero al final del primer año nos entregarán 5400\$.

Si lo mantenemos un tiempo $t=2$ años, entonces recibiremos de intereses:

$$\frac{5000 \cdot 8 \cdot 2}{100} = 800\$$$

Si lo mantenemos t años serán:

$$\frac{5000 \cdot 8 \cdot t}{100}$$

Si el interés al que se deposita es del $r\%$ anual, nos darán:

$$\frac{5000 \cdot r \cdot t}{100}$$

Finalmente, si el capital depositado es de C dólares, entonces se tiene la conocida fórmula:

$$Intereses = \frac{C \cdot r \cdot t}{100}$$

Interés compuesto.

Empezamos también con un ejemplo para posteriormente ir generalizando hasta llegar a la fórmula final. Es importante entender los sucesivos pasos:

En el interés compuesto, los intereses que se producen al cabo del tiempo estipulado no se retiran sino que se suman a la cantidad depositada y ese es el capital inicial del siguiente año. El proceso se reitera tal y como indica el siguiente esquema que vamos a concretar para un capital inicial de $C = 5000\$$ y un interés (o rédito) del 8% anual. Las operaciones se dejarán indicadas para poder pasar mejor a la generalización. Obsérvese que, al final de cada año, se tiene el capital inicial de ese año más el interés que ha producido:

Tiempo	Capital inicial	Capital final
Primer año	5000	$5000 + 5000 \frac{8}{100} = 5000(1 + \frac{8}{100})$
Segundo año	$5000(1 + \frac{8}{100})$	$5000(1 + \frac{8}{100}) + 5000(1 + \frac{8}{100}) \frac{8}{100} = 5000(1 + \frac{8}{100})(1 + \frac{8}{100}) =$ $= 5000(1 + \frac{8}{100})^2$
Tercer año	$5000(1 + \frac{8}{100})^2$	$5000(1 + \frac{8}{100})^2 + 5000(1 + \frac{8}{100})^2 \frac{8}{100} =$ $= 5000(1 + \frac{8}{100})^3$

El resultado del capital final del tercer año nos sitúa sobre la pista de la fórmula general. Vemos que se trata de una progresión geométrica cuya razón es:

$$\left(1 + \frac{8}{100}\right)$$

En consecuencia: si el capital depositado inicialmente es C_i , el interés lo representamos por r y el tiempo, en años, es t , entonces se llega a que el capital final C_f es:

$$C_f = C_i \left(1 + \frac{r}{100}\right)^t$$

Aparece, por tanto, una fórmula de tipo exponencial. Conviene trabajarla especialmente despejando todos los elementos.

Veamos **ejemplos**:

1. Si se depositan 5000 dólares al 6% anual, ¿Cuánto tiempo ha de pasar para que se transformen en 5800 dólares?

Conocemos todos los elementos de la fórmula excepto el tiempo t que debemos despejar. Obsérvese en el proceso que tomaremos logaritmos para llegar al resultado final que, por cierto, la calculadora lo dará en forma decimal y debemos enseñar a pasarlo a años, meses, días.

$$5800 = 5000 \left(1 + \frac{6}{100}\right)^t = 5000(1,06)^t$$

$$\frac{5800}{5000} = (1,06)^t \Rightarrow 1,16 = (1,06)^t$$

Tomando logaritmos

$$\log 1,16 = \log (1,06)^t = t \log 1,06;$$

$$t = \frac{\log 1,16}{\log 1,06} = 2,547 \text{ años} = 2 \text{ años } 6 \text{ meses}$$

2. Se depositaron 8300\$ en una entidad bancaria y nos devolvieron 10 225\$ al cabo de tres años. ¿Cuál fue el interés compuesto que le aplicaron?

En este caso hemos de despejar el rédito r .

$$10225 = 8300 \left(1 + \frac{r}{100}\right)^3 \Rightarrow \frac{10225}{8300} = 1'232 = \left(1 + \frac{r}{100}\right)^3 \Rightarrow 1 + \frac{r}{100} = \sqrt[3]{1'232} = 1'072 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{r}{100} = 1'072 - 1 = 0'072 \Rightarrow r = 100 \cdot 0'072 = 7'2\%$$

Es decir, que la entidad bancaria le aplicó un interés compuesto del 7'2% a los 8300\$.

Anualidades de capitalización.

La situación es la siguiente: una persona decide depositar cada año en el banco una cantidad fija de dólares que representamos por C . El banco le ofrece un interés compuesto anual del $r\%$ y al cabo de t años, la persona decide retirar su dinero. ¿Cuánto le debe entregar el banco?

Vamos a seguir el proceso paso a paso. Para simplificar la escritura, notaremos por i el cociente $\frac{r}{100}$. Así que se depositan C dólares cada año con lo cual:

Capital al final del año 1º : $C + Ci = C(1+i)$. Ahora deposita C dólares de nuevo.

El capital al final del año 2º: $(C + C(1+i))(1+i) = C(1+i) + C(1+i)^2$

Capital al final del año 3º:

$$(C + C(1+i) + C(1+i)^2)(1+i) = C(1+i) + C(1+i)^2 + C(1+i)^3$$

Por tanto, capital al final del año tº: $C(1+i) + C(1+i)^2 + C(1+i)^3 + \dots + C(1+i)^t$

Se observa que el capital que le es entregado a la persona está formado por la suma de los términos de una progresión geométrica de primer término $C(1+i)$ y razón $1+i$. Aplicando la fórmula de la suma de los términos de una progresión geométrica

$$S = \frac{a_1(r^n - 1)}{r - 1}$$

se tiene:

$$\text{Capital acumulado} = \frac{C(1+i)^t(1+i) - C(1+i)}{1+i-1} = \frac{C[(1+i)^{t+1} - (1+i)]}{i}$$

Ejemplo

Si se depositan cada año 3500 dólares al 6% durante 6 años, ¿qué capital se obtiene?

Es una aplicación directa de la fórmula final aunque puede ser un interesante ejercicio calcular las capitalizaciones año a año y sumarlas para comprobar que se obtiene el mismo resultado.

$$\begin{aligned} \text{Capital acumulado} &= \frac{C[(1+i)^{t+1} - (1+i)]}{i} = \\ &= \frac{3500[(1+0,06)^7 - (1+0,06)]}{0,06} = 25878,43 \$ \end{aligned}$$

Crecimiento de una población.

Una situación parecida a la anterior se produce con el crecimiento de una población. Supongamos que una población P de animales de un determinado paraje crece al ritmo del 2% anual de manera continua. Pues bien, al final del primer año, la población estará formada por los iniciales P más el crecimiento que, en este caso, es:

$$P + P \frac{2}{100} \Rightarrow P \left(1 + \frac{2}{100}\right)$$

Haciendo un razonamiento similar, se llega a que si la población inicial es P_i la fórmula que da la población final P_f esto es, el crecimiento de la población en t años es:

$$P_f = P_i \left(1 + \frac{r}{100}\right)^t$$

Soluciones a los ejercicios planteados en la lección

Rebotes

	Bote 1º	Bote 2º	Bote 3º	Bote 4º
a	1'6	1'28	1.024	0'8192
b	1	0'5	0'25	0'125
c	0'8	0'32	0'128	0'0512

Teselado con hexágonos.

Se comprueba que para pasar de una estructura a la siguiente basta con añadir 5 baldosas blancas. La pauta es clara:

1 baldosa roja: 6 baldosas blancas.

2 baldosas rojas: 6 + 5 blancas

3 rojas: 6 + 2.5 blancas

4 rojas: 6 + 3.5 blancas

Por tanto, para 30 rojas se necesitan $6 + 29.5 = 151$ blancas.

Sucesiones numéricas. Término general.

b) $a_n = 4$; c) $a_n = 7 + 4(n-1)$ d) $a_n = n^2$ e) $a_n = 2^{n-1}$

Términos de la sucesión.

a) $a_n = 2n - 1$ $a_1 = 1, a_4 = 7, a_{10} = 19, a_{43} = 85$

b) $b_n = (-1)^n$ $b_1 = -1, b_2 = 1, b_{15} = -1, b_{104} = 1$

c) $c_n = 6n - 3$ $c_1 = 3, c_2 = 9, c_3 = 15, c_{15} = 87$

d) $d_n = 2^n + 5n$ $d_1 = 7, d_3 = 23, d_6 = 94, d_{10} = 1074$

e) $e_n = \frac{3n^2 + 5}{2n + 3}$ $e_1 = \frac{8}{5}, e_3 = \frac{32}{9}, e_5 = \frac{80}{13}, e_{10} = \frac{305}{23}$

Progresiones aritméticas.

a) 5, 9, 13, 17, 21, ... $d = 4$

- b) 65, 72, 79, 86, 93, ... $d = 7$
 c) 16, 10, 4, -2, -8, ... $d = -6$
 d) $\frac{7}{5}, \frac{31}{15}, \frac{41}{15}, \frac{51}{15}, \dots, d = \frac{2}{3}$
 e) 0'72, 0'95, 1'18, 1'41, 1'64, ... $d = 0'23$

Progresiones geométricas.

- a) 3, 6, 12, 24, ... $r = 2$
 b) 0'5, 2'5, 12'5, 62'5, ... $r = 5$
 c) 3, 1'5, 0'75, 0'375, ... $r = \frac{1}{2}$
 d) 1, -2, 4, -8, 16, ... $r = -2$