

Matemáticas

IQ.EDU.DO

INTELIGENCIA QUISQUEYA

Resolución de ecuaciones con logaritmos



Las ecuaciones con logaritmos son aquellas en las que se involucra al logaritmo en uno o en los dos lados de la igualdad y la variable o incógnita forma parte del argumento del logaritmo. Para resolver una ecuación de este tipo se debe hacer uso de las propiedades de los logaritmos.

A un lado de la igualdad

$$\text{Log}_2(x+3)^3=4$$

En ambos lados de la igualdad

$$\text{Log}(3x+2)+\log 9=\log(x+5)$$

Por eso es importante conocer las propiedades de la logaritmación que son:

1. Logaritmo de un producto

El logaritmo del producto de dos factores es igual a la suma de los logaritmos de los factores:

Resolución de ecuaciones con logaritmos

Propiedades de los logaritmos

Logaritmo de un producto

$$\log_a xy = \log_a x + \log_a y$$

2. Logaritmo de un cociente.

El logaritmo de un cociente es igual a la diferencia entre los logaritmos del numerador y del denominador:

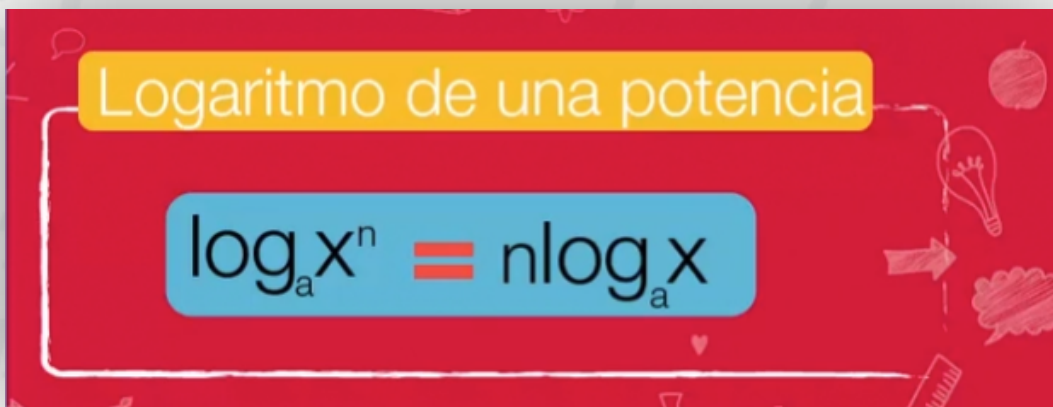
Logaritmo de un cociente

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$$

Resolución de ecuaciones con logaritmos

3. Logaritmo de una potencia.

El logaritmo de un número elevado a una potencia es igual al exponente multiplicado por el logaritmo del número:

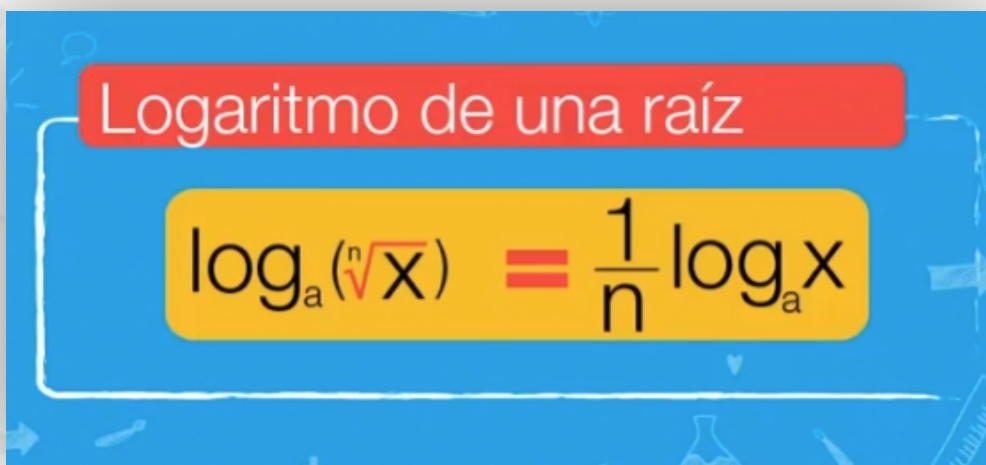


Logaritmo de una potencia

$$\log_a x^n = n \log_a x$$

4. Logaritmo de una raíz.

El logaritmo de una raíz es igual al cociente entre el logaritmo del radicando y el índice de la raíz:



Logaritmo de una raíz

$$\log_a (\sqrt[n]{x}) = \frac{1}{n} \log_a x$$

Resolución de ecuaciones con logaritmos

Ahora, veamos cómo se soluciona una ecuación con logaritmos, por ejemplo:

$$\log_4(x-3)=1-\log_4x$$

Primero, aplicamos el inverso aditivo para agrupar los logaritmos al lado izquierdo

$$\log_4[(x-3)\cdot x]=1$$

Segundo, aplicamos la propiedad logaritmo de un producto

$$\log_4(x-3)+\log_4x=1$$

Tercero, aplicamos propiedad distributiva

$$\log_4[(x^2-3x)]=1$$

Cuarto, convertimos la expresión de la forma logarítmica a la forma exponencial

$$4^1=x^2-3x$$

Resolución de ecuaciones con logaritmos

Quinto, como tenemos una ecuación que tiene forma de ecuación cuadrática y como 4 elevado a la 1 es igual a 4, entonces para que quede configurada como una ecuación cuadrática debemos dejar el 0 en uno de los dos lados, por eso aplicamos el inverso aditivo con el fin de pasar el 4 al otro lado de la ecuación

$$0 = x^2 - 3x - 4$$

A partir de lo anterior obtenemos la ecuación cuadrática que es de la forma

$0 = ax^2 + bx + c$ y podemos resolverla por medio de factorización, obteniendo:

$$0 = (x - 4)(x + 1)$$

Ahora, aplicamos el teorema del factor nulo y tenemos que:

$$x - 4 = 0 \quad \text{ó} \quad x + 1 = 0$$

Despejando x , obtenemos:

$$x = 4$$



$$x = -1$$



Resolución de ecuaciones con logaritmos

Finalmente, no podemos olvidar que la ecuación inicial $x-3=1-x$ contiene logaritmos y los logaritmos no admiten cantidades negativas, entonces al reemplazar en la ecuación la x por 4 no hay problema porque:

$$\begin{aligned}x &= 4 \\ \log_4(4-3) &= 1 - \log_4 4 \\ \log_4 1 &= 1 - \log_4 4\end{aligned}$$

es decir, que al reemplazar los valores son positivos, por tanto se acepta el resultado $x=4$.

Ahora, al reemplazar en la ecuación la x por -1 hay problema porque:

$$\log_4(-1-3) = 1 - \log_4 -1$$

Nos da:

$$\log_4 -4 = 1 - \log_4 -1$$

es decir, que al reemplazar los valores son negativos, por tanto se descarta el resultado $x=-1$, obteniendo como única solución $x=4$.

Resolución de ecuaciones con logaritmos

En síntesis, hemos visto que las ecuaciones con logaritmos son aquellas en las que se involucra al logaritmo en uno o en los dos lados de la igualdad y que para resolver este tipo de ecuaciones se debe hacer uso de la propiedades de la logaritmación: logaritmo de un producto, logaritmo de un cociente, logaritmo de una potencia, logaritmo de una raíz con el fin de obtener la solución.

Ecuaciones con logaritmos

Síntesis

Son ecuaciones en las que se involucra al logaritmo en uno o en los dos lados de la igualdad y la variable forma parte del argumento.

Para resolver una ecuación con logaritmos tenemos que:

Aplicar las propiedades de la logaritmación



Ejercitación

Responde las preguntas de la 1 a la 5 a partir de la siguiente información:

Las ecuaciones con logaritmos son aquellas en las que se involucra al logaritmo en uno o en los dos lados de la igualdad y para resolver una ecuación de este tipo se debe hacer uso de las propiedades de los logaritmos.

1. La propiedad, logaritmo de una raíz es igual a:
 - a. Al cociente entre el logaritmo del radicando y el índice de la raíz.
 - b. A la suma de los logaritmos de los factores.
 - c. A la diferencia entre los logaritmos del radicando y del índice.
 - d. Al exponente multiplicado por el logaritmo del número.
2. La expresión $x^n = nx$ corresponde a la propiedad:
 - a. Logaritmo de un producto.
 - b. Logaritmo de una raíz.
 - c. Logaritmo de un cociente.
 - d. Logaritmo de una potencia.
3. La expresión que representa el enunciado: El logaritmo del producto de dos factores es igual a la suma de los logaritmos de los factores es:
 - a. $xy = x - y$.
 - b. $xy = a + a$.
 - c. $xy = x + y$.
 - d. $xy = x + x$.
4. El logaritmo de un cociente es igual a la diferencia entre los logaritmos del:
 - a. Numerador y denominador.
 - b. Sustraendo y minuendo.
 - c. Dividendo y divisor.
 - d. Factor y producto.

Ejercitación

5. Las ecuaciones con logaritmos son aquellas en las que se involucra al logaritmo en uno o en los dos lados de la igualdad, es decir, que la incógnita aparece como:

- a. La raíz de un logaritmo.
- b. El argumento de un logaritmo.
- c. La base de un logaritmo.
- d. El índice de un logaritmo.

Evaluación

Responde las preguntas de la 1 a la 5 a partir de la siguiente información:

Para resolver ecuaciones con logaritmos se debe hacer uso de las propiedades de los logaritmos

1. En la ecuación $\log 3x-5-\log 5x=1.23$ se debe hacer uso de la propiedad:
 - a. Logaritmo de un producto.
 - b. Logaritmo de una suma.
 - c. Logaritmo de un cociente.
 - d. Logaritmo de una raíz
2. En la ecuación $\log 3x+2+\log 9=\log (x+5)$ se debe hacer uso de la propiedad:
 - a. Logaritmo de un producto.
 - b. Logaritmo de una potencia.
 - c. Logaritmo de un cociente.
 - d. Logaritmo de una raíz.
3. En la ecuación $\log \log 5^n = \log \log 28$ se debe hacer uso de la propiedad:
 - a. Logaritmo de un cociente.
 - b. Logaritmo de una potencia.
 - c. Logaritmo de un producto.
 - d. Logaritmo de una raíz.
4. En la ecuación $\log x+\log x+1=\log 12$ se debe hacer uso de la propiedad:
 - a. Logaritmo de una potencia.
 - b. Logaritmo de una suma.
 - c. Logaritmo de un cociente.
 - d. Logaritmo de un producto.

Evaluación

5. En la ecuación $3+x=5+x-2$ se debe hacer uso de la propiedad:

- a. Logaritmo de un cociente.
- b. Logaritmo de un producto.
- c. Logaritmo de una raíz.
- d. Logaritmo de una potencia.