

Lección 3: Paralelas, secantes y perpendiculares

Contenido de este documento:

Perpendiculares

Paralelas

Ángulos formados por una recta secante a otras dos.

Perpendiculares

Definición Se dice que dos rectas r y s son perpendiculares, si se cortan formando ángulos rectos. Para indicar que r es perpendicular a s , se escribe $r \perp s$.

Teorema 1 Por un punto situado en una recta puede trazarse **una** perpendicular y **solo una**.

Demostración

Sea una recta cualquiera y tomemos en ella dos puntos M y N . Sea O un punto cualquiera de ella.

Tracemos por O una semirrecta cualquiera OC .

Si los ángulos $\widehat{COM}$ y $\widehat{CON}$ son iguales, OC es por definición perpendicular a MN , si son desiguales uno de ellos será inferior al otro; supongamos

$$\widehat{CON} < \widehat{COM}.$$

Si hacemos girar OC alrededor de O de manera que $\widehat{CON}$ aumente, $\widehat{COM}$ irá disminuyendo. Existe una posición OC' de OC para la cual el ángulo

$$\widehat{C'ON} = \widehat{C'OM}$$

y la semirrecta OC' es perpendicular a MN . Luego en el punto O existe una perpendicular a MN .

Solo existe una, pues solo hay una posición OC' de OC para la cual los ángulos $\widehat{C'OM}$ y $\widehat{C'ON}$ son iguales. ■

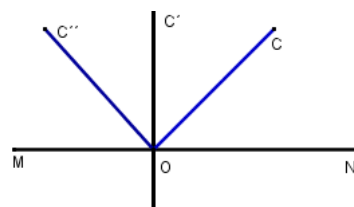


Fig. 1

Teorema 2 Por un punto **exterior** a una recta puede trazarse a dicha recta una perpendicular, y solo una.

Demostración

Puede trazarse una perpendicular.

Sea la recta AB ; P un punto exterior a ella y P' el punto que coincidirá con P , al doblar el semiplano superior girando sobre AB .

La recta PP' es perpendicular a la recta dada AB .

En efecto: en el giro, los ángulos $\widehat{PDA}$ y $\widehat{P'DA}$ coinciden, siendo por tanto iguales, y como son adyacentes, las rectas PP' y AB son perpendiculares entre sí.

Solo se puede trazar una. Supongamos que otra cualquiera PC , por ejemplo, fuera perpendicular a AB ; entonces $\hat{m}$ será recto.

Tracemos CP' y llamemos $\hat{n}$ el ángulo que forma con AB .

Giremos CP' alrededor de CB . Al superponer el semiplano superior con el inferior, los ángulos $\hat{m}$ y $\hat{n}$ coincidirán, y como el $\hat{m}$ es recto, lo será también $\hat{n}$, y siendo adyacentes, los lados PC y $P'C$ deberán estar en línea recta, lo cual es imposible porque entre dos puntos solo se puede trazar una recta.

Por consiguiente, por el punto P solamente se puede trazar una perpendicular a la recta AB , como queríamos demostrar. ■

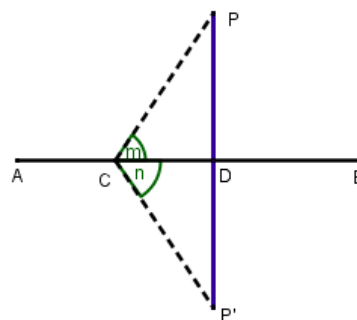


Fig. 2

Definición Dados una recta r y un punto A fuera de ella, el segmento AB de la perpendicular trazada desde A a la recta se llama **segmento perpendicular** o perpendicular desde A a r . El punto B recibe el nombre de **pie** de la perpendicular.

Otro segmento que una el punto A con otro punto cualquiera de r , se llama **oblicua** trazada por A a la recta r , y los puntos de intersección de la misma con la recta se llaman **pie** de la oblicua correspondiente (por ejemplo, C).

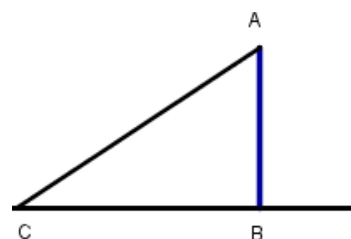


Fig. 3

Teorema 3 Si desde un punto exterior a una recta se trazan a ésta un segmento perpendicular y varios oblicuos:

- 1) El segmento perpendicular es menor que cualquiera de los oblicuos.
- 2) Los segmentos oblicuos cuyos pies equidistan del pie del perpendicular son iguales.
- 3) De dos oblicuos cuyos pies distan desigualmente del pie del perpendicular, el mayor es aquel cuyo pie dista más.

Demostración

1) Decimos que $\overline{AB} < \overline{AC}$

En efecto, si prolongamos el segmento perpendicular hacia el semiplano inferior, una longitud $BA' = BA$ y trazamos el segmento oblicuo CA' , los triángulos ABC y $A'BC$ son congruentes, por tener un ángulo igual ($\widehat{m} = \widehat{m'}$) comprendido entre lados respectivamente congruentes:

($\overline{AB} = \overline{A'B}$ por construcción) y $\overline{BC}$ común a los dos;

por tanto, $\overline{AC} = \overline{A'C}$ entonces:

$$\overline{AB} + \overline{A'B} < \overline{AC} + \overline{A'C} \Rightarrow 2 \overline{AB} < 2 \overline{AC} \Rightarrow \overline{AB} < \overline{AC}$$

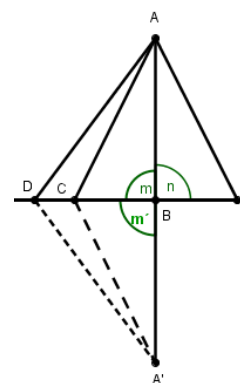


Fig. 4

2) Si AC y AE son dos segmentos oblicuo tales que $\overline{BC} = \overline{BE}$, se cumple que $\overline{AC} = \overline{AE}$

En efecto, los triángulos rectángulos ABC y AEB que tienen un ángulo igual, comprendido entre lados respectivamente iguales

($BC = BE$ y AB común), serán congruentes, por consiguiente, $\overline{AC} = \overline{AE}$

3) Si consideramos los oblicuos AE y AD, situados a distinto lado del perpendicular, siendo $BD > BE$, decimos que $\overline{AD} > \overline{AE}$

En efecto, tomemos $\overline{BC} = \overline{BE}$, tracemos $\overline{AC}$ y se tendrá por (2)

$\overline{AC} = \overline{AE}$, Como el punto C es interior al triángulo ADA' , será:

$$\overline{AC} + \overline{A'C} < \overline{AD} + \overline{A'D}$$

Pero los oblicuos AC , $A'C$, AD y $A'D$, trazados desde los puntos C y D, tienen sus pies A y A', a igual distancia del pie perpendicular DB; por tanto: $\overline{AC} = \overline{A'C}$ y $\overline{AD} = \overline{A'D}$, Y la desigualdad anterior se transformará en esta otra $2 \overline{AC} < 2 \overline{AD} \Rightarrow \overline{AC} < \overline{AD}$ y por ser $\overline{AC} = \overline{AE}$, $\overline{AD} > \overline{AE}$ ■